BI-ZDM – zápočtový test č. 1
varianta B

ZS 2019/2020, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: ______________________________

Počet listů: ____________

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**
   Ukažte a řádně zdůvodněte, že $n^3 + 3n^2 - n + (-1)^n \cdot n^3 \in \Omega(n^2)$

2. (2 body) **Matematická indukce**
   Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou rekurentně takto: $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ukažte matematickou indukcí, že $a_n = n^2 - 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

3. (2 body) **Množiny**
   Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:
   $$(A \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) = (B \cup A) \cap C$$

4. (2 body) **Zobrazení**
   Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ daného předpisem
   $$f(m, n) = (-5m - n + 3, -9m - 2n)\,.$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**
   Definujme induktivně podmnožinu celých čísel S takto:

   (P0) $12, 32 \in S$,

   (P1) jsou-li $m, n \in S$, pak také $m + n \in S, m - n \in S$,

   a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina S neobsahuje. Nalezněte k takové, že platí následující vztah, a tento vztah dokažte:
   $$S = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \text{ je dělitelné } k\}\,.$$