

BI-ZDM – zápočtový test č. 1  
varianta E

ZS 2021/2022, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: \_\_\_\_\_

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**

Ukažte a řádně zdůvodněte, že  $\lfloor n2^n + n^2 \rfloor \in o(n3^n)$

2. (2 body) **Matematická indukce**

Ukažte, že pro všechna kladná přirozená čísla  $n$  platí, že  $3^{4n} - 2^{3n}$  je dělitelné 73.

3. (2 body) **Množiny**

Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:

$$B \setminus (A \cap B \cap C) = (B \setminus (A \cup C)) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup ((B \cap A) \setminus C)$$

4. (2 body) **Zobrazení**

Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  daného předpisem

$$f(m, n) = (3m - 4n, -m + n - 5).$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**

Definujme induktivně podmnožinu celých čísel  $S$  takto:

(P0)  $7^9, 7^{12} \in S$ ,

(P1) jsou-li  $m, n \in S$ , pak také  $m \cdot n \in S, m/n \in S$ ,

a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina  $S$  neobsahuje. Dokažte tento vztah:

$$S = \{7^n : n \in \mathbb{Z} \text{ a zároveň } n \text{ je dělitelné } 3\}.$$