

BI-ZDM – zápočtový test č. 1  
varianta I

ZS 2021/2022, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: \_\_\_\_\_

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**

Ukažte a řádně zdůvodněte, že  $n^3 + n^2 \sin(n) \in \omega(n^2)$ .

2. (2 body) **Matematická indukce**

Ukažte, že pro všechna kladná přirozená čísla  $n$  platí, že

$$\sum_{i=1}^n (3i - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

3. (2 body) **Množiny**

Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:

$$(B \setminus C) \cup \overline{(A \cap B)} = \overline{A \cap B \cap C}$$

4. (2 body) **Zobrazení**

Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  daného předpisem

$$f(m, n) = (7m - 8n, 3m - 3n + 3).$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**

Definujme induktivně podmnožinu racionálních čísel  $S$  takto:

(P0)  $7 \in S$ ,

(P1) je-li  $m \in S$ , pak také  $7m \in S, m/7 \in S$ ,

a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina  $S$  neobsahuje. Dokažte tento vztah:

$$S = \{m : m \text{ je ve tvaru } 7^k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}\}.$$