

BI-ZDM – zápočtový test č. 1  
varianta K

ZS 2021/2022, FIT ČVUT v Praze

Jméno a příjmení: \_\_\_\_\_

úkol	1	2	3	4	5	celkem
body	2	2	2	2	2	10
získané body						

- Pište čitelně – nečitelné se neboduje.
- Své odpovědi řádně zdůvodněte – za odpověď bez vysvětlení se strhávají body.
- Při použití indukce v základním i indukčním kroku pečlivě napište, co přesně dokazujete.
- Podepište tento i všechny další papíry.

1. (2 body) **Asymptotické chování funkcí**

Ukažte a řádně zdůvodněte, že  $n \sin(n) + n^2 \in \omega(n)$ .

2. (2 body) **Matematická indukce**

Ukažte, že pro všechna kladná přirozená čísla  $n$  platí, že

$$\sum_{i=1}^n (4i + 3) = 2n^2 + 5n.$$

3. (2 body) **Množiny**

Dokažte následující vztah pomocí logických formulí:

$$\left( (A \cap B) \setminus (B \setminus A) \right) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$$

4. (2 body) **Zobrazení**

Rozhodněte o surjektivitě a injektivitě zobrazení  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  daného předpisem

$$f(m, n) = (6m - 3n + 2, -m + 4n).$$

5. (2 body) **Induktivně zadané množiny**

Definujme induktivně podmnožinu racionálních čísel  $S$  takto:

(P0)  $3 \in S$ ,

(P1) je-li  $m \in S$ , pak také  $3m \in S, m/3 \in S$ ,

a žádná jiná čísla než ta získaná konečným použitím předchozích dvou pravidel množina  $S$  neobsahuje. Dokažte tento vztah:

$$S = \{m : m \text{ je ve tvaru } 3^k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}\}.$$