2. test - varianta A

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^6$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 6 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2\cdots a_6 R b_1b_2\cdots b_6 \iff a_1a_2\cdots a_6 = b_1b_2\cdots b_6$$
$$\vee\ a_i < b_i \text{ pro nejmenší } i \in \{1,\dots,6\} \text{ takové, že } a_i \neq b_i\,.$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

- není SY: např. $100000 R 200000$, ale $\neg\, 200000 R 100000$
- je TR: mějme $\underbrace{a_1a_2\cdots a_6}_{a} R \underbrace{b_1b_2\cdots b_6}_{b} \wedge b_1\cdots b_6 R \underbrace{c_1\cdots c_6}_{c}$
  Pokud $a=b$, pak aRc, protože $a=bRc$
  pokud $b=c$, pak aRc, protože $aRb=c$
  Pokud $a\neq b\neq c$, pak $\exists\, i,j$ nejmenší takové, že $a_i\neq b_i$ a $b_j\neq c_j$
  a platí: $a_i<b_i$, $b_j<c_j$
  - $i=j \Rightarrow a_i<b_i<c_i$, pro $k<i$ jsou $a_k=b_k=c_k$
    tedy aRc
  - $i<j \Rightarrow a_k=b_k=c_k$ pro $k<i$, $a_i<b_i=c_i$
    $b_k=c_k$ pro $k<j$
    $\Rightarrow aRc$
  - $i>j \Rightarrow a_k=b_k=c_k$ pro $k<j$, $a_j=b_j<c_j$
    $a_k=b_k$ pro $k<i$ $\Rightarrow aRc$
- je AN: mějme $aRb \wedge bRa$, chceme ukázat, že $a=b$
  pro spor nechť $a\neq b \Rightarrow \exists\, i$ nejmenší takové, že $a_i\neq b_i$
  $\left.\begin{array}{l} aRb \Rightarrow a_i<b_i \\ bRa \Rightarrow b_i<a_i \end{array}\right\}$ spor
- není AS: např. $000000R000000$

2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci R danou následující maticí:

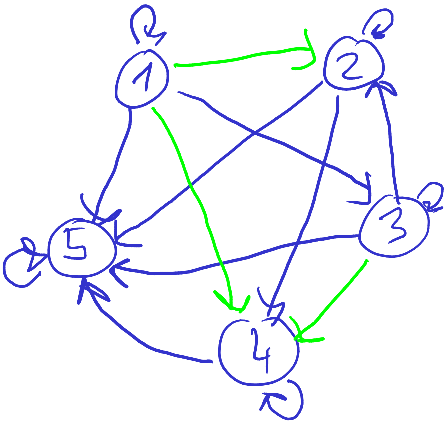
$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) (2 body) Nalezněte nejmenší možnou tranzitivní relaci S (ve smyslu inkluze) takovou, že $R \subseteq S$, a zapište ji pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je S ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je S uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je S ekvivalence, napište její faktorovou množinu.

Pomocí diagramu hledám tranzitivní uzávěr (zelené šipky + modré)



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{R^+}$$

$R^+ = S$

- S je RE (1 na diagonále)
- S není SY ($1R2 \wedge \neg 2R1$)
- S je TR, protože se jedná o tranzitivní uzávěr
- S je AN – při transponování se potkají 1 pouze na diagonále

$\Rightarrow$ S je uspořádání

Hasseův diagram (konstruuji přímo z původní relace, případně odstraním hrany z R^2: $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$)

(jedná se o úplné uspořádání)

3. (2 body) **Kombinatorika I**
Jdete si pro svačinu do pekárny, kde mají 4 druhy sladkého pečiva, každý kus stojí 20 Kč. V peněžence máte stokorunu. Nemusíte nutně utratit vše, ale aspoň jeden kus si koupit chcete. Všeho mají dostatek kromě koblih, které jsou v regálu poslední čtyři. Kolik máte možností, jak si koupit svačinu? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

Kupuju 1 až 5 kusů (100/20 = 5)

- nezáleží na pořadí
- druhy se mažou opakovat

→ kombinace s opakováním

$\Rightarrow \binom{n+4-1}{3}$ ← 3 oddělovače mezi 4 druhy (n kusů pečiva)

$$\Rightarrow \underset{1\,\text{kus}}{\binom{4}{3}} + \underset{2\,\text{kusy}}{\binom{5}{3}} + \underset{3\,\text{kusy}}{\binom{6}{3}} + \underset{4\,\text{kusy}}{\binom{7}{3}} + \underset{5\,\text{kusů}}{\binom{8}{3}} - \underset{\substack{5\,\text{koblih}\\(\text{mají pouze } 4)}}{1} = 124$$

Nebo: přidám si jednu přihrádku jako nekoupené kusy

$$\binom{5 + \overset{4\,\text{druhy} + 1}{5} - 1}{\underset{\text{oddělovače}}{4}} - \underset{\text{nekoupil jsem si nic}}{1} - \underset{5\,\text{koblih}}{1}$$

$$\Rightarrow \binom{9}{4} - 2 = 124$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Je vás 17 přátel na dovolené a chcete jít na výlet do hor. V okolí jsou tři kopce, na které můžete vyrazit. Na každý vrchol půjde alespoň někdo. Na nejvyšší vrchol je kvůli bezpečnosti potřeba jít alespoň ve dvou. Kolik máte možností, jak se rozdělit, pokud záleží kromě toho, kdo s kým půjde, také na tom, kdo půjde na který výlet? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

Rozdělujeme se do tří skupin, žádná není prázdná, jsou rozlišitelné (podle toho, na který jdou kopec)

$\Rightarrow S(17,3)\cdot 3!$

Stirlingovo číslo 2. druhu

Musím ještě odečíst varianty, kdy na nejvyšší vrchol jde někdo sám:

$$17\cdot S(16,2)\cdot 2$$

kdo jde sám

skupiny jsou rozlišitelné

zbylých 16 do dvou neprázdných skupin

$$\Rightarrow \boxed{S(17,3)\cdot 3! - 17\cdot S(16,2)\cdot 2} = 127\,632\,872$$

rozdělím zbytek

Nebo $\sum_{k=2}^{15}\binom{17}{k}\cdot S(17-k,2)\cdot 2$

výběr k na nejvyšší

prohození 2 zbylých kopců