Varianta C

1. (2 body) **Relace**
Nechť $X = \{0,1,2\}^6$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 6 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1 a_2 \cdots a_6 R b_1 b_2 \cdots b_6 \iff a_1 a_2 \cdots a_6 \neq b_1 b_2 \cdots b_6$$
$$\wedge\, a_i < b_i \text{ pro nejmenší } i \in \{1,\dots,6\} \text{ takové, že } a_i \neq b_i\,. (*)$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY - není, protipříklad: $000000 R 100000$ ale $\neg 100000 R 000000$

TR - je: mějme $a = a_1 \dots a_6$, $b = b_1 \dots b_6$, $c = c_1 \dots c_6$
taková, že $aRb \wedge bRc$.
z $(*)$ mám i, j: $a_i < b_i$, $b_j < c_j$ (pro menší indexy se rovnají)
kdyby $a = c \Rightarrow i = j \Rightarrow a_i < b_i < c_i = a_i$ ↯
Tedy $a \neq c$ (plyne i z dalšího postupu)

Dále pokud: • $i = j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k < i$
$a_i < b_i < c_i \Rightarrow a_i < c_i \Rightarrow aRc$

• $i < j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k < i$
$\left.\begin{matrix} a_i < b_i \\ b_i = c_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_i < c_i \Rightarrow aRc$

• $i > j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k < j$

$a_j = b_j < c_j \Rightarrow aRc$

AN - je: pokud $aRb \wedge bRa$,
pak $a \neq b$, $\exists i$: $\underbrace{a_i < b_i \wedge b_i > a_i}_{\text{nelze}}$ (pro $k < i$: $a_k = b_k$)
$\Rightarrow$ předpoklad nikdy nemůže nastat, proto
$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ je vždy pravda

AS je: máme ukázat, že $aRb \Rightarrow \neg bRa$ pro $\forall a, b \in X$
Pro spor mějme $aRb \wedge bRa$. To nikdy nemůže nastat ze stejných důvodů jako v AN.

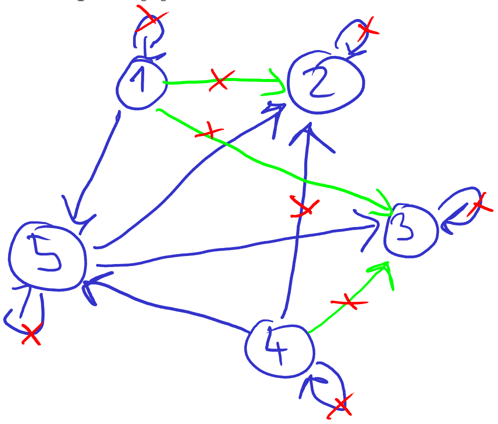
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1,2,3,4,5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte nejmenší možnou tranzitivní relaci S (ve smyslu inkluze) takovou, že $R \subseteq S$, a zapište ji pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je S ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je S uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je S ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



$S = R^+$ (Přidané dvojice jsou v diagramu zeleně (R^2))

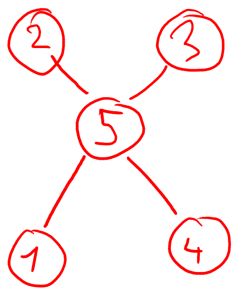
$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S je RE (na diag. 1)
- není SY ($1S2 \wedge \neg 2S1$)
- je TR (z def. R^+)
- je AN (M_S a M_S^T mají obě 1 pouze na diagonále)

$\Rightarrow$ S je uspořádání, není ekvivalence

Hasseův diagram

X … odebírám hranu



3. (2 body) **Kombinatorika I**
Nakupujete v knihkupectví vánoční dárky na setkání s přáteli, kde se obdarováváte takovým způsobem, že se dárky náhodně očíslují a pak se losují čísla. Chcete přinést celkem 5 dárků, ale některé možná koupíte později někde jinde (ne všechny). Kamarádi jsou milovníci Shakespeara, takže v úvahu připadá Hamlet, Sen noci svatojánské, Romeo a Julie, Mnoho povyku pro nic nebo Macbeth. Všech knih mají dostatek kromě Hamleta, kterého jsou poslední čtyři výtisky. Kolik máte možností, jak v knihkupectví nakoupit? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

5 možností, můžou se opakovat, vybírám 1 až 5 knih (n)

↳ kombinace s opak: $\binom{n+5-1}{n}$ ← 4 oddělovače pro 5 titulů

$n = 1$

$$\binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} - 1 = 250$$

nemůžu koupit 5x Hamleta

Nebo: 6 možnost je, že knihu nekoupím

$$\binom{5+6-1}{5} - 1 - 1 = 250$$

koupím aspoň 1

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Je vás 14 kamarádů na dovolené a na následující den se nabízí tři možné výlety: na hrad, k rybníku, nebo pěšky na nedaleký kopec. Každé možnosti se zúčastní aspoň někdo. Kapacita hradní exkurze je omezena na 11 lidí. Kolik máte možností, jak se rozdělit, pokud záleží kromě toho, kdo s kým půjde, také na tom, kdo půjde na který výlet? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

↳ 3 skupiny, v každé alespoň někdo

⇒ Stirlingova čísla 2. druhu

$$3! \cdot S(14,3) - \binom{14}{12} \cdot 2$$

výlety jsou rozlišitelné

12 lidí na hradě

zbylí 2 mají dvě možnosti
rybník | kopec
kopec | rybník

více než 12 lidí na hrad jít nemůže, protože pak by nebyl dostatek lidí na zbylé 2 výlety

$= 4.733.638$