Varianta D

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^6$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 6 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2\cdots a_6 R b_1b_2\cdots b_6 \iff a_1a_2\cdots a_6 \neq b_1b_2\cdots b_6 \wedge a_i > b_i \text{ pro největší } i \in \{1,\dots,6\} \text{ takové, že } a_i \neq b_i\,. \quad (*)$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY – není, protipříklad: 000001 R 000000 ale ¬ 000000 R 100000

TR – je: mějme $a = a_1\dots a_6$, $b = b_1\dots b_6$, $c = c_1\dots c_6$ takové, že $aRb \wedge bRc$.

z (*) mám i, j: $a_i > b_i$, $b_j > c_j$ (pro větší indexy se rovnají)

- $i = j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k > i$; $a_i > b_i > c_i \Rightarrow a_i \neq c_i \Rightarrow a \neq c$ $\Big\} \Rightarrow aRc$

- $i > j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k > i$
  $\left.\begin{array}{l} a_i > b_i \\ b_i = c_i \end{array}\right\} \Rightarrow a_i > c_i \Rightarrow a \neq c$ $\Big\} \Rightarrow aRc$

- $i < j \Rightarrow a_k = b_k = c_k$ pro $k > j$
  $a_j = b_j > c_j \Rightarrow a \neq c$ $\Big\} \Rightarrow aRc$

AN – je: pokud $aRb \wedge bRa$,
pak $a \neq b$, $\exists i$: $\underbrace{a_i > b_i \wedge b_i > a_i}_{\text{nelze}}$ (pro $k > i$: $a_k = b_k$)
$\Rightarrow$ předpoklad nikdy nemůže nastat, proto $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ je vždy pravda

AS je: máme ukázat, že $aRb \Rightarrow \neg bRa$ pro $\forall a, b \in X$
Pro spor mějme $aRb \wedge bRa$. To nikdy nemůže nastat ze stejných důvodů jako v AN.

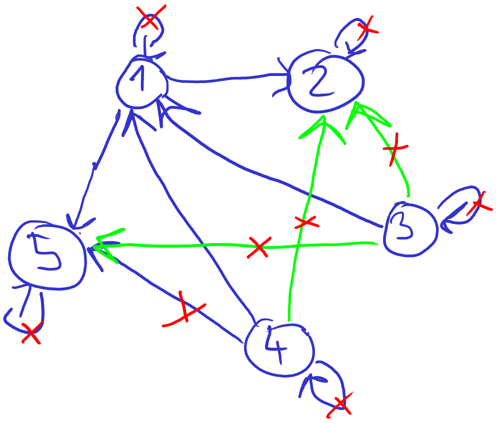
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte nejmenší možnou tranzitivní relaci S (ve smyslu inkluze) takovou, že $R \subseteq S$, a zapište ji pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je S ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je S uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je S ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



$S = R^+$ (Přidané dvojice jsou v diagramu zelené (R^2))

stačí, R^3 už je stejné

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

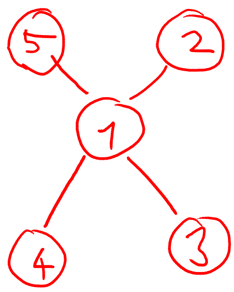
$S^2 \subseteq S$

S je RE (na diag. 1)
- není SY ($1S5 \wedge \neg 5S1$)
- je TR (z def. R^+)
- je AN (M_S a M_S^T mají obě 1 pouze na diagonále)

$\Rightarrow$ S je uspořádání, není ekvivalence

Hasseův diagram

× … odebírám hranu



3. (2 body) **Kombinatorika I**

Nakupujete v knihkupectví vánoční dárky na setkání s přáteli, kde se obdarováváte takovým způsobem, že se dárky náhodně očíslují a pak se losují čísla. Chcete přinést celkem 6 dárků, ale některé možná koupíte později někde jinde (ne všechny). Kamarádi jsou milovníci Tolkiena a zrovna vyšla nově ilustrované vydání celého jeho díla, takže v úvahu připadá Hobit, některé ze tří knih Pána prstenů, Silmarillion nebo Příhody Toma Bombadila. Všech knih mají dostatek kromě Hobita, kterého je posledních pět výtisků. Kolik máte možností, jak v knihkupectví nakoupit? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

6 možností, můžou se opakovat, vybírám 1 až 6 knih (n)

↳ kombinace s opak: $\binom{n+6-1}{n}$ 5 oddělovačů pro 6 titulů

$$\underset{n=1}{\binom{6}{1}} + \underset{n=2}{\binom{7}{2}} + \underset{n=3}{\binom{8}{3}} + \underset{n=4}{\binom{9}{4}} + \underset{n=5}{\binom{10}{5}} + \binom{11}{6} - 1$$

nemůžu koupit 6x Hobita

Nebo: 7. možnost je, že knihu nekoupím

$$\binom{5+7-1}{5} - 1 - 1$$

koupím aspoň 1

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Je vás 24 kamarádů na dovolené a na následující den se nabízí ~~tři~~ čtyři možné výlety: na hrad, k rybníku, do muzea, nebo pěšky na nedaleký kopec. Každé možnosti se zúčastní aspoň někdo. Kapacita hradní exkurze je omezena na 20 lidí. Kolik máte možností, jak se rozdělit, pokud záleží kromě toho, kdo s kým půjde, také na tom, kdo půjde na který výlet? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

↳ 4 skupiny, v každé alespoň někdo

⇒ Stirlingova čísla 2. druhu

$$4! \cdot S(24,4) - \binom{24}{21} \cdot 3!$$

výlety jsou rozlišitelné

21 lidí na hradě

zbylí 3 mají 3! možností (permutace rybník/muzeum/kopec)

více než 21 lidí na hrad jít nemůže, protože pak by nebyl dostatek lidí na zbylé 3 výlety