2. zápočtová písemka - varianta E

1. (2 body) **Relace**
Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_1+a_2+a_3 < b_1+b_2+b_3) \\ \vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \leq b_1)\,.$$

není SY: např. $\underbrace{000}_{\Sigma=0} R \underbrace{111}_{\Sigma=3}$ ale $\neg\, 111 R 000$

je TR: mějme $a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \wedge b_1b_2b_3 R c_1c_2c_3$

distributivita

$\overset{}{\Leftrightarrow} (a_1+a_2+a_3 < b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 < c_1+c_2+c_3) \Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (a_1+a_2+a_3 < b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge b_1 \leq c_1)$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \leq b_1 \wedge b_1+b_2+b_3 < c_1+c_2+c_3)$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \leq b_1 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge b_1 \leq c_1)$

$a_1+a_2+a_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge a_1 \leq b_1 \leq c_1$

$\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

není AN: $\underbrace{010}_{\Sigma=1} R \underbrace{001}_{\Sigma=1} \wedge 001 R 010 \wedge 001 \neq 010$

není AS: $010 R 001 \wedge 001 R 010$

2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**

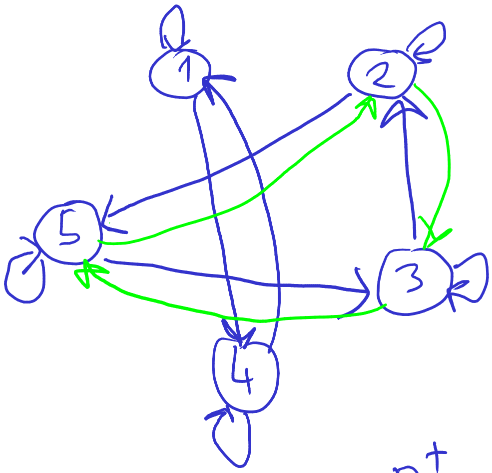
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplnění na R^+

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^+
- je RE (1 na diag.)
- je SY ($M_{R^+} = M_{R^+}^T$)
- není AU ($2R^+5$, $5R^+2$, $5 \neq 2$)
- je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ je ekvivalence, není uspořádání

Faktorová množina

$$\{1,2,3,4,5\}/R^+ = \{\{1,4\},\{2,3,5\}\}$$

3. (2 body) **Kombinatorika I**
Uvažujme sadu 52 francouzských pokerových karet, které mají čtyři barvy (srdce, kára, piky, kříže) a každá barva má karty v hodnotách 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. K nim přidáme 4 stejné žolíky. Z tohoto balíku postupně vybírám a řadím si do ruky zprava doleva 5 karet. Kolik je možných způsobů výběru takových, že nemám žádnou pikovou kartu? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

- 52 různých karet + 4 stejné
- vybírám 5 karet, záleží na pořadí
- žádná piková $\Rightarrow$ $52 - 13 = 39$ různých + 4 stejné

Rozdělím podle počtu žolíků:

0 žol. : $39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35$ (variace bez opak.)

1 žol. $5 \cdot \underbrace{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}_{\text{obsadím zbylé 4 pozice}}$

vyberu pozici pro žolíka

2 žol. $\binom{5}{2} \cdot \underbrace{39 \cdot 38 \cdot 37}_{\text{zbylé pozice}}$

pozice pro 2 žolíky

3 žol. $\binom{5}{3} \cdot 39 \cdot 38$

4 žol. $\binom{5}{4} \cdot 39$

$$\Rightarrow \underline{\underline{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 + \binom{5}{1} \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 + \binom{5}{2} \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 + \binom{5}{3} 39 \cdot 38 + \binom{5}{4} \cdot 39}}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Nachystal jsem 8 různých variant zadání písemky (A až H). Kolik způsoby můžu zadání rozdat 21 studentům za předpokladu, že každou variantu píše alespoň jeden student a zároveň jsem si omylem vytisknul pouze 12 zadání ve variantě A (ostatních mám dostatek)? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

• studenti jsou rozlišitelní, rozdělujeme do 8 neprázdných rozlišitelných skupin (Stirlingovo číslo 2. druhu krát faktoriál za rozlišitelné skupiny)

$$\Rightarrow \quad S(21, 8) \cdot 8!$$

Od toho odečtu:

$$\binom{21}{13} \cdot S(8,7) \cdot 7!$$

vyberu 13, kteří jsou v A

zbylých 8 studentů do B – H

B – H jsou rozlišitelné!

$$\binom{21}{14} \cdot 7!$$

vyberu 14 do A

zbylých 7 studentů v B – H

Více než 14 studentů v A nemůže být, protože pak by nějakou variantu nedostal žádný student.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S(21,8) \cdot 8! - \binom{21}{13} \cdot S(8,7) \cdot 7! - \binom{21}{14} \cdot 7!}}$$