2. zápočtová písemka - varianta F

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3) \vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_3 \le b_3)\,.$$

není SY: např. $\underbrace{222}_{\Sigma=6} R \underbrace{111}_{\Sigma=3}$ ale $\neg\, 111 R 222$

je TR: mějme $a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \wedge b_1b_2b_3 R c_1c_2c_3$

distributivita

$\overset{}{(=)}\ (a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 > c_1+c_2+c_3) \Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee\ (a_1+a_2+a_3 > \underbrace{b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3}_{} \wedge b_3 \le c_3)$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee\ (a_1+a_2+a_3 = \underbrace{b_1+b_2+b_3 \wedge a_3 \le b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 > c_1+c_2+c_3}_{})$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee\ (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_3 \le b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge b_3 \le c_3)$

$a_1+a_2+a_3 = c_1+c_2+c_3 \quad \wedge \quad a_3 \le b_3 \le c_3$

$\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

není AN: $\underbrace{01\underline{0}}_{\Sigma=1} R \underbrace{10\underline{0}}_{\Sigma=1} \wedge 100 R 010 \wedge 100 \neq 010$

není AS: $010 R 100 \wedge 100 R 010$

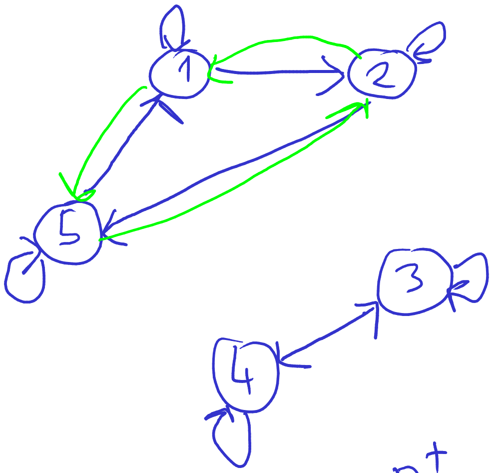
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplnění na R^+

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^+ • je RE (1 na diag.)
• je SY ($M_{R^+} = M_{R^+}^T$)
• není AS ($2R^+5$, $5R^+2$, $5 \neq 2$)
• je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ je ekvivalence, není uspořádání

Faktorová množina

$$\{1,2,3,4,5\}/R^+ = \{\{3,4\}, \{1,2,5\}\}$$

3. (2 body) **Kombinatorika I**
Uvažujme sadu 52 francouzských pokerových karet, které mají čtyři barvy (srdce, kára, piky, kříže) a každá barva má karty v hodnotách 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. K nim přidáme 4 stejné žolíky. Z tohoto balíku postupně vybírám a řadím si do ruky zprava doleva 6 karet. Kolik je možných způsobů výběru takových, že nemám žádné eso? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

- 52 různých karet + 4 stejné
- vybírám 6 karet, záleží na pořadí
- žádné eso ⇒ 52 − 4 = 48 různých (+ 4 stejné)

Rozdělím podle počtu žolíků:

0 žol. : $48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43$ (variace bez opak.)

1 žol. $\underset{\text{vyberu pozici pro žolíka}}{6} \cdot \underbrace{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}_{\text{obsadím zbylých 5 pozic}}$

2 žol. $\underset{\text{pozice pro 2 žolíky}}{\binom{6}{2}} \cdot \underbrace{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}_{\text{zbylé pozice}}$

3 žol. $\binom{6}{3} \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46$

4 žol. $\binom{6}{4} \cdot 48 \cdot 47$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{4} \binom{6}{k} \cdot \frac{48!}{(48-(6-k))!}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Nachystal jsem 7 různých variant zadání písemky (A až G). Kolik způsoby můžu zadání rozdat 17 studentům za předpokladu, že každou variantu píše alespoň jeden student a zároveň jsem si omylem vytisknul pouze 9 zadání ve variantě B (ostatních mám dostatek)? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

• studenti jsou rozlišitelní, rozdělujeme do 7 neprázdných rozlišitelných skupin (Stirlingovo číslo 2. druhu krát faktoriál za rozlišitelné skupiny)

$$\Rightarrow \quad S(17,7)\cdot 7!$$

Od toho odečtu:

$$\binom{17}{10}\cdot S(7,6)\cdot 6!$$

vyberu 10, kteří jsou v B

zbylých 7 studentů do A, C–G

A, C–G jsou rozlišitelné

$$\binom{17}{11}\cdot 6!$$

vyberu 11 do B

zbylých 6 studentů v A, C–G (po jednom)

Více než 11 studentů v B nemůže být, protože pak by některou variantu nedostal žádný student.

$$\Rightarrow \quad S(17,7)\cdot 7! - \binom{17}{10}\cdot S(7,6)\cdot 6! - \binom{17}{11}\cdot 6!$$