2. zápočtová písemka - varianta G

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0, 1, 2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0, 1, 2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3Rb_1b_2b_3 \iff (a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3) \vee (a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \wedge a_1 < b_1 \wedge a_2 \leq b_2).$$

není SY: např. $\underbrace{000}_{\Sigma=0} R \underbrace{111}_{\Sigma=3}$ ale $\neg\, 111 R 000$

je TR: mějme $a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \wedge b_1b_2b_3 R c_1c_2c_3$

distributivita

$\Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3 < b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 < c_1+c_2+c_3)$ $\Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3$ $\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee\, (\underbrace{a_1+a_2+a_3 < b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3}_{\Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3} \wedge b_1 < c_1 \wedge b_2 \leq c_2$

$\vee\, (a_1+a_2+a_3 = \underbrace{b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 < b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \wedge b_1+b_2+b_3 < c_1+c_2+c_3}_{\Rightarrow a_1+a_2+a_3 < c_1+c_2+c_3 \Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3})$

$\vee\, (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 < b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge b_1 < c_1 \wedge b_2 \leq c_2)$

$a_1+a_2+a_3 = c_1+c_2+c_3$ $\quad$ $a_1 < b_1 < c_1 \wedge a_2 \leq b_2 \leq c_2$

$\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

je AS: $\forall a,b : aRb \Rightarrow \neg\, bRa$

Sporem - mějme a, b takové, že $aRb \wedge bRa$, $a = a_1a_2a_3$, $b = b_1b_2b_3$

Nutně $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$.

Pak $aRb \Rightarrow a_1 < b_1$
$bRa \Rightarrow b_1 > a_1$ $\Big\}$ spor

je AN: $\forall a,b : \underbrace{aRb \wedge bRa}_{\text{nikdy nenastane z důkazu výše}} \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$ implikace je pravdivá

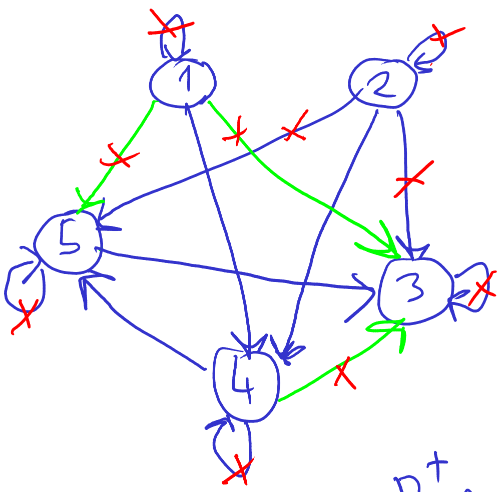
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1,2,3,4,5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplnění na R^+!

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^+ • je RE (1 na diag.)

• není SY ($1R^+3 \wedge \neg 3R^+1$)

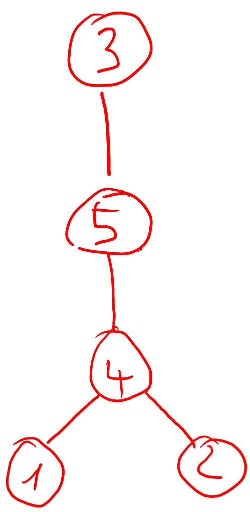
• je AN (nenastane $(M_{R^+})_{i,j} = (M_{R^+})_{j,i} = 1$ pro $i \neq j$)

• je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ není ekvivalence, je uspořádání!

Hasseův diagram: odebírám diagonálu ($S = R^+ \setminus \Delta_X$)

pak $S_r = S \setminus S^2$



3. (2 body) **Kombinatorika I**
Uvažujme sadu 52 francouzských pokerových karet, které mají čtyři barvy (srdce, kára, piky, kříže) a každá barva má karty v hodnotách 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. K nim přidáme 4 stejné žolíky. Z tohoto balíku postupně vybírám a řadím si do ruky zprava doleva 7 karet. Kolik je možných způsobů výběru takových, že mám právě jednu pikovou kartu? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

- 52 různých karet + 4 stejné
- vybírám 7 karet, záleží na pořadí
- právě 1 piková $\Rightarrow$ $52-13=39$ ostatních

Rozdělím podle počtu žolíků:

0 žol.: $\binom{13}{1}\cdot 7 \cdot \underbrace{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34}$ vybírám ze zbylých (nepikových) karet na zbylé pozice

vyberu pikovou a pozici pro ni

1 žol. $\binom{6}{1}\cdot\binom{13}{1}\cdot 7\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35$

vyberu pozici pro žolíka (jedna pozice ze 7 už je obsazena pikovou kartou)

2 žol. $\binom{6}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot 7\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36$

pozice pro 2 žolíky

3 žol. $\binom{6}{3}\cdot\binom{13}{1}\cdot 7\cdot 39\cdot 38\cdot 37$

4 žol. $\binom{6}{4}\cdot\binom{13}{1}\cdot 7\cdot 39\cdot 38$

obsazení nepikových, nežolíkových pozic

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{4}\binom{6}{k}\cdot\frac{\overbrace{39!}}{(39-(6-k))!}\cdot\binom{13}{1}\cdot 7$$

žolíků

pozice pro žolíky (jedna je obs. pikovou

nepikových karet

výběr pikové

pozice pro pikovou

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Nachystal jsem 6 různých variant zadání písemky (A až F). Kolik způsoby můžu zadání rozdat 19 studentům za předpokladu, že každou variantu píše alespoň jeden student a zároveň jsem si omylem vytisknul pouze 1 zadání ve variantě C a 2 zadání ve variantě D (ostatních mám dostatek)? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

- studenti jsou rozlišitelní, rozdělujeme do neprázdných rozlišitelných skupin (Stirlingovo číslo 2. druhu krát faktoriál za rozlišitelné skupiny)

Rozlišíme dva případy podle # v C a D

- 1 student v C, 1 v D

$$\binom{19}{1}\cdot\binom{18}{1}\cdot S(17,4)\cdot 4!$$

A, B, E, F

zbylých 17 studentů, co nemají C ani D

permutace A, B, E, F

+

- 1 student v C, 2 v D

$$\binom{19}{1}\cdot\binom{18}{2}\cdot S(16,4)\cdot 4!$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{4!\cdot\binom{19}{1}\cdot\left(\binom{18}{1}\cdot S(17,4)+\binom{18}{2}\cdot S(16,4)\right)}}$$