2. zápočtová písemka – varianta

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3) \\ \vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \geq b_1 \wedge a_3 > b_3).$$

   Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

není SY: např. $\underbrace{111}_{\Sigma=3} R \underbrace{000}_{\Sigma=0}$, ale $\neg 000 R 111$

je TR: mějme $a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \wedge b_1b_2b_3 R c_1c_2c_3$, platí $a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$?

distributivita

$\Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 > c_1+c_2+c_3)$ $\Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3$ $\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (\underbrace{a_1+a_2+a_3 > b_1+b_2+b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3}_{\Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3} \wedge b_1 \geq c_1 \wedge b_3 > c_3)$ $\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (\underbrace{a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \geq b_1 \wedge a_3 > b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 > c_1+c_2+c_3}_{\Rightarrow a_1+a_2+a_3 > c_1+c_2+c_3})$ $\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

$\vee (a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 \wedge a_1 \geq b_1 \wedge a_3 > b_3 \wedge b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 \wedge b_1 \geq c_1 \wedge b_3 > c_3)$

$a_1+a_2+a_3 = c_1+c_2+c_3$

$a_1 \geq b_1 \geq c_1 \wedge a_3 > b_3 > c_3$

$\Rightarrow a_1a_2a_3 R c_1c_2c_3$

je AS: $\forall a,b: aRb \Rightarrow \neg bRa$

Sporem – mějme a,b takové, že $aRb \wedge bRa$, $a = a_1a_2a_3$, $b = b_1b_2b_3$

Nutně $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$.

Pak $aRb \Rightarrow a_3 > b_3$
$bRa \Rightarrow b_3 > a_3$ } spor

je AN: $\forall a,b: \underbrace{aRb \wedge bRa}_{\text{nikdy nenastane z důkazu výše}} \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$ implikace je pravdivá

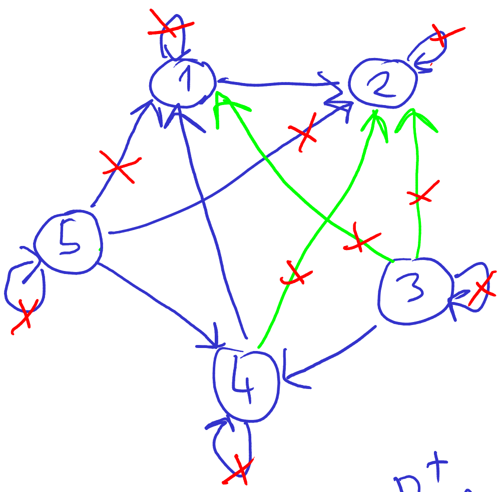
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci R danou následující maticí:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



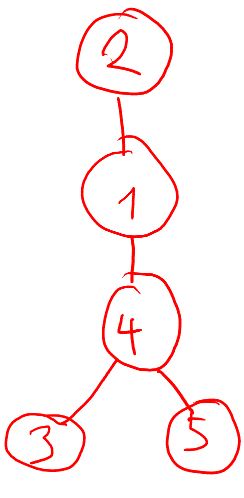
Zelené šipky jsou doplnění na R^+

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R^+
- je RE (1 na diag.)
- není SY ($1R^+2 \wedge \neg 2R^+1$)
- je AU (nenastane $(M_{R^+})_{i,j} = (M_{R^+})_{j,i} = 1$ pro $i \neq j$)
- je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ není ekvivalence, je uspořádání!

Hasseův diagram: odebírám diagonálu ($S = R^+ \setminus \Delta_X$)
pak $S_r = S \setminus S^2$



3. (2 body) **Kombinatorika I**
Uvažujme sadu 52 francouzských pokerových karet, které mají čtyři barvy (srdce, kára, piky, kříže) a každá barva má karty v hodnotách 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. K nim přidáme 4 stejné žolíky. Z tohoto balíku postupně vybírám a řadím si do ruky zprava doleva 8 karet. Kolik je možných způsobů výběru takových, že mám právě jedno eso? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

- 52 různých karet + 4 stejné
- vybírám 8 karet, záleží na pořadí
- právě 1 eso $\Rightarrow$ $52 - 4 = 48$ ostatních

Rozdělím podle počtu žolíků:

0 žol.: $\binom{4}{1} \cdot 8 \cdot \underbrace{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}_{\text{vybírám ze zbylých (ne esa) karet na zbylé pozice}}$

vyberu eso a jeho pozici

1 žol. $\binom{7}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 8 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43$

vyberu pozici pro žolíka (jedna pozice ze 7 až je obsazena esem)

2 žol. $\binom{7}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot 8 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$

pozice pro 2 žolíky

3 žol. $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 8 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45$

4 žol. $\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot 8 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \overbrace{\frac{48!}{(48-(7-k))!}}^{\text{obsazení nepikových, nežolíkových pozic}} \cdot \binom{4}{1} \cdot 8$$

k: # žolíků

$\binom{7}{k}$: pozice pro žolíky (jedna je obs. esem)

$\frac{48!}{(48-(7-k))!}$: # neesových karet

$\binom{4}{1}$: výběr esa

8: pozice pro eso

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Nachystal jsem 5 různých variant zadání písemky (A až E). Kolik způsoby můžu zadání rozdat 23 studentům za předpokladu, že každou variantu píše alespoň jeden student a zároveň jsem si omylem vytisknul pouze 2 zadání ve variantě E a 1 zadání ve variantě A (ostatních mám dostatek)? Výsledek není potřeba vyčíslovat.

• studenti jsou rozlišitelní, rozdělujeme do neprázdných rozlišitelných skupin (Stirlingovo číslo 2. druhu krát faktoriál za rozlišitelné skupiny)

Rozlišíme dva případy podle # v A a E

• 1 student v A, 1 v E

$$\binom{23}{1}\cdot\binom{22}{1}\cdot S(21,3)\cdot 3!$$

permutace B, C, D

B, C, D

zbylých 21 studentů, co nemají A ani E

+

• 1 student v A, 2 v E

$$\binom{23}{1}\cdot\binom{22}{2}\cdot S(20,3)\cdot 3!$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{3!\cdot\binom{23}{1}\cdot\left(\binom{22}{1}\cdot S(21,3)+\binom{22}{2}\cdot S(20,3)\right)}}$$