# 2. zápočtová písemka - varianta I

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci $R$ na $X$ následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3Rb_1b_2b_3 \iff (a_1+a_2 < b_1+b_2) \vee (a_1+a_2 = b_1+b_2 \wedge a_3 \le b_3).$$

   Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow bRa$

není: protipříklad $\underbrace{00}_{0}0 \, R \, \underbrace{10}_{1}0$, $0<1$, ale $\neg 100 R 000$

TR: $\forall a,b,c \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Mějme $a = a_1a_2a_3$, $b = b_1b_2b_3$, $c = c_1c_2c_3$

$aRb \wedge bRc$ — Pro jednotlivé případy:

$\Leftrightarrow (a_1+a_2 < b_1+b_2 \wedge b_1+b_2 < c_1+c_2) \Rightarrow a_1+a_2 < c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (a_1+a_2 < b_1+b_2 \wedge b_1+b_2 = c_1+c_2 \wedge b_3 \le c_3) \Rightarrow a_1+a_2 < c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (a_1+a_2 = b_1+b_2 \wedge a_3 \le b_3 \wedge b_1+b_2 < c_1+c_2) \Rightarrow a_1+a_2 < c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (a_1+a_2 = b_1+b_2 \wedge a_3 \le b_3 \wedge b_1+b_2 = c_1+c_2 \wedge b_3 \le c_3)$

$\underbrace{a_1+a_2 = c_1+c_2 \quad a_3 \le c_3}_{\Rightarrow aRc}$

$\Rightarrow$ je TR

AN: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

není: $010 R 100 \wedge 100 R 010 \wedge 100 \neq 010$

AS: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow \neg bRa$

není: $010 R 100 \wedge 100 R 010$

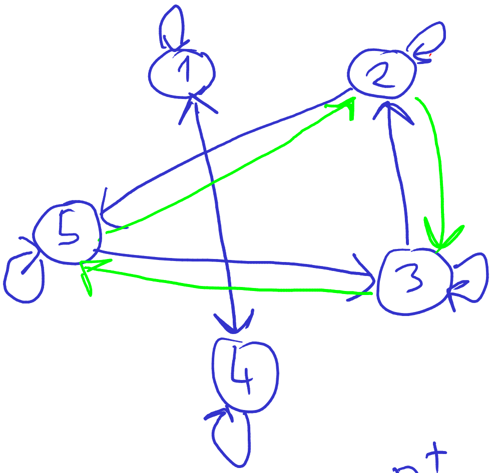
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci

$$R = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4), (5,3), (5,5)\}\,.$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr $R^+$ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je $R^+$ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je $R^+$ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je $R^+$ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.




Zelené šipky jsou doplnění na $R^+$

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^+$
- je RE (1 na diag.)
- je SY ($M_{R^+} = M_{R^+}^T$)
- není AN ($4R^+1 \wedge 1R^+4 \wedge 1 \neq 4$)
- je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ $R^+$ je ekvivalence, není uspořádání

Faktorová množina

$$\{1,2,3,4,5\}/_{R^+} = \{\{2,3,5\}, \{1,4\}\}$$

3. (2 body) **Kombinatorika I**
V ZDM je 23 studentů, kteří chtějí vypracovávat domácí úkol, na kterém můžou spolupracovat až ve trojicích. Všichni chtějí pracovat v co největším týmu (neboli jen jeden tým má méně členů než je dovolené maximum). Kolik způsoby se studenti můžou do týmů rozdělit?

Vybírám postupně trojice (a zbydou 2 ve dvojici)

$$\frac{\binom{23}{3}\cdot\binom{20}{3}\cdot\binom{17}{3}\cdot\binom{14}{3}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}}{7!}$$

Trojice mezi sebou nejsou rozlišitelné
(je 7! možností, které mi dají stejné trojice)

Nebo: Všechny seřadím, pak beru po trojicích (zbyde 2)
a vydělím 7! za záměnu trojic, $(3!)^7$ za ignorování pořadí v rámci každé ze 7 trojic a 2 za záměnu ve dvojici.

$$\underbrace{\_\,\_\,\_\,|\,\_\,\_\,\_\,|\,\_\,\_\,\_\ \dots\ \_\,\_\,\_}_{7\text{ trojic}}|\,\_\,\_$$

$$\boxed{\frac{23!}{7!\cdot(3!)^7\cdot 2}}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**

Studenti jedné paralelky, ve které je 24 osob, se rozhodli připravovat na zkoušku ze ZDM tak, že každé z 9 témat připraví někteří a pak to ostatním vysvětlí. Kolik mají možností, jak se k tématům rozdělit, platí-li, že každé téma musí připravovat alespoň někdo, každý chystá právě jedno téma, kombinatoriku nechystá více než 15 studentů, protože je lehká, a relace musí chystat alespoň dva, protože je tam spousta definic?

A

B

Rozděluji do 9 neprázdných, rozlišitelných skupin

→ Stirlingova čísla 2. druhu · faktoriál

$$S(24,9)\cdot 9! \; - \; \#\text{nepřípustných } (\neg A, \neg B)$$

$\neg A$: 16 studentů kombinatoriku, zbylých 8 má každý jedno z 8 témat

⇒ více než 16 nemůže dělat kombinatoriku

$\neg B$: 1 student dělá relace, zbytek rozdělený mezi zbylá témata

⇒ $\neg A$ už je zahrnuta v $\neg B$

$$\Rightarrow S(24,9)\cdot 9! - \underbrace{\binom{24}{1}}_{\text{1 chystá relace}} \cdot \underbrace{S(23,8)}_{\text{zbytek mezi zbylých 8 témat}} \cdot \underbrace{8!}_{\text{tém. jsou rozlišitelná}}$$