2. zápočtová písemka - varianta J

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_2 + a_3 > b_2 + b_3) \vee (a_2 + a_3 = b_2 + b_3 \wedge a_1 \geq b_1).$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow bRa$

není: protipříklad $\underbrace{10}_{1}0 R \underbrace{00}_{0}0$, ale $\neg\, 000 R 100$; $1 > 0$

TR: $\forall a,b,c \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Mějme $a = a_1a_2a_3$, $b = b_1b_2b_3$, $c = c_1c_2c_3$

$aRb \wedge bRc$ — Pro jednotlivé případy:

$\Leftrightarrow (a_2+a_3 > b_2+b_3 \wedge b_2+b_3 > c_2+c_3) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee\ (\underline{a_2+a_3 > b_2+b_3} \wedge \underline{b_2+b_3 = c_2+c_3} \wedge b_1 \geq c_1) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee\ (\underline{a_2+a_3 = b_2+b_3} \wedge a_1 \geq b_1 \wedge \underline{b_2+b_3 > c_2+c_3}) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee\ (a_2+a_3 = b_2+b_3 \wedge a_1 \geq b_1 \wedge b_2+b_3 = c_2+c_3 \wedge b_1 \geq c_1)$

$a_1+a_2 = c_1+c_2$ $\quad$ $a_1 \geq c_1$

$\Rightarrow aRc$

$\Rightarrow$ je TR

AN: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

není: $010 R 001 \wedge 001 R 010 \wedge 001 \neq 010$

AS: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow \neg bRa$

není: $010 R 001 \wedge 001 R 010$

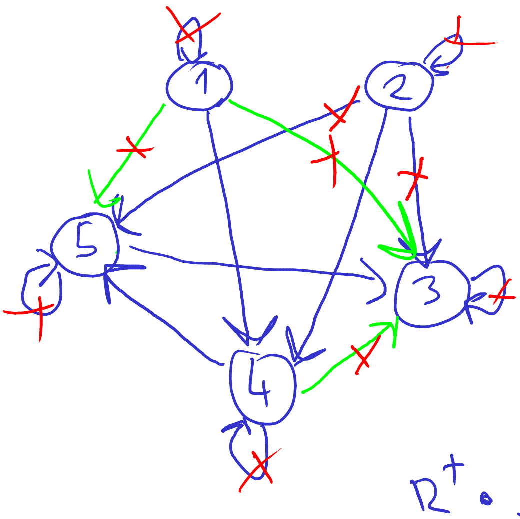
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaci

$$R = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,5)\}.$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplnění na R^+

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

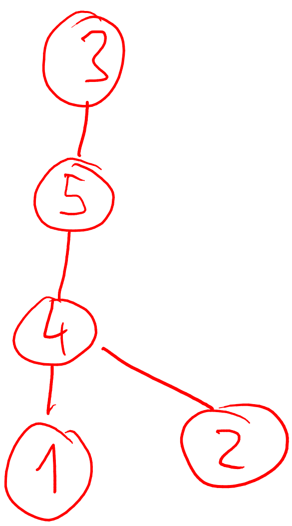
R^+
- je RE (1 na diag.)
- není SY ($M_{R^+} \neq M_{R^+}^T$)
- je AN ($M_{i,j} = M_{j,i} = 1 \Rightarrow i = j$)
- je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ není ekvivalence, je č. uspořádání

Odebírám diagonálu: $S := R^+ \setminus \Delta_X$

$S_r = S \setminus S^2$

Hasseův diagram:



3. (2 body) **Kombinatorika I**
V ZDM je 20 studentů, kteří chtějí vypracovávat domácí úkol, na kterém můžou spolupracovat až ve trojicích. Všichni chtějí pracovat v co největším týmu (neboli jen jeden tým má méně členů než je dovolené maximum). Kolik způsoby se studenti můžou do týmů rozdělit?

Vybírám postupně trojice (a zbydou 2 ve dvojici)

$$\frac{\binom{20}{3}\cdot\binom{17}{3}\cdot\binom{14}{3}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}}{6!}$$

Trojice mezi sebou nejsou rozlišitelné (je 6! možností, které dají stejné trojice)

Nebo: Všechny seřadím, pak beru po trojicích (zbyde 2) a vydělím 6! za záměnu trojic, $(3!)^6$ za ignorování pořadí v rámci každé ze 7 trojic a 2 za záměnu ve dvojici.

$$\underbrace{---\,|\,---\,|\,---\ \dots\ ---}_{6\text{ trojic}}\,|\,--$$

$$\frac{20!}{6!\cdot(3!)^6\cdot 2}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**

Studenti jedné paralelky, ve které je 24 osob, se rozhodli připravovat na zkoušku ze ZDM tak, že každé z 8 témat připraví někteří a pak to ostatním vysvětlí. Kolik mají možností, jak se k tématům rozdělit, platí-li, že každé téma musí připravovat alespoň někdo, každý chystá právě jedno téma, kombinatoriku nechystá více než 16 studentů, protože je lehká, a relace musí chystat alespoň dva, protože je tam spousta definic?

A

B

Rozděluji do 9 neprázdných, rozlišitelných skupin

→ Stirlingova čísla 2. druhu · faktoriál

$S(24,8)\cdot 8! \; - \; \#\text{nepřípustných} \; (\neg A, \neg B)$

$\neg A$: 17 studentů kombinatoriku, zbylých 7 má každý jedno z 7 témat

⇒ více než 17 nemůže dělat kombinatoriku

$\neg B$: 1 student dělá relace, zbytek rozdělený mezi zbylá témata

⇒ $\neg A$ už je zahrnuta v $\neg B$

$$\Rightarrow S(24,8)\cdot 8! - \binom{24}{1}\cdot S(23,7)\cdot 7!$$

1 chystá relace

zbytek mezi zbylých 7 témat

témata jsou rozlišitelná