2. zápočtová písemka - varianta K

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci R na X následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_1 + a_2 > b_1 + b_2) \vee (a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \wedge a_2 \leq b_2).$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow bRa$

není: protipříklad $\underbrace{10}_{1}0 \, R \, \underbrace{00}_{0}0$, $1 > 0$, ale $7000 R 100$

TR: $\forall a,b,c \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Mějme $a = a_1a_2a_3$, $b = b_1b_2b_3$, $c = c_1c_2c_3$

$aRb \wedge bRc$ — Pro jednotlivé případy:

$\Leftrightarrow (a_1+a_2 > b_1+b_2 \wedge b_1+b_2 > c_1+c_2) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (\underline{a_1+a_2 > b_1+b_2} \wedge \underline{b_1+b_2 = c_1+c_2} \wedge b_2 \leq c_2) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (\underline{a_1+a_2 = b_1+b_2} \wedge a_2 \leq b_2 \wedge \underline{b_1+b_2 > c_1+c_2}) \Rightarrow a_1+a_2 > c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\vee (a_1+a_2 = b_1+b_2 \wedge a_2 \leq b_2 \wedge b_1+b_2 = c_1+c_2 \wedge b_2 \leq c_2)$

$a_1+a_2 = c_1+c_2$ $\quad a_2 \leq c_2$

$\Rightarrow aRc$

$\Rightarrow$ je TR

AN: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

není: $001 R 002 \wedge 002 R 001 \wedge 001 \neq 002$

AS: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow \neg bRa$

není: $001 R 002 \wedge 002 R 001$

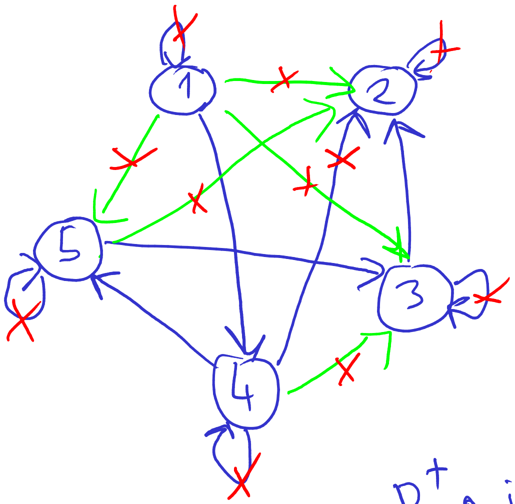
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1,2,3,4,5\}$ relaci

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,2),(3,3),(4,2),(4,4),(4,5),(5,3),(5,5)\}\,.$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr R^+ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je R^+ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je R^+ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je R^+ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplnění na R^+!

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^+ • je RE (1 na diag.)
• není SY ($M_{R^+} \neq M_{R^+}^T$)
• je AN ($M_{i,j} = M_{j,i} = 1 \Rightarrow i = j$)
• je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ R^+ není ekvivalence, je uspořádání!

Hasseův diagram $\quad S = R^+ \setminus \Delta_X$

$S_r = S \setminus S^2$

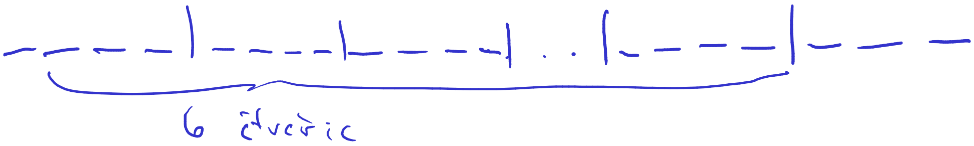
3. (2 body) **Kombinatorika I**
V ZDM je 27 studentů, kteří chtějí vypracovávat domácí úkol, na kterém můžou spolupracovat až ve čtveřicích. Všichni chtějí pracovat v co největším týmu (neboli jen jeden tým má méně členů než je dovolené maximum). Kolik způsoby se studenti můžou do týmů rozdělit?

Vybírám postupně čtveřice (a zbydou 3 ve trojici)

$$\frac{\binom{27}{4}\cdot\binom{23}{4}\cdot\binom{19}{4}\cdot\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}}{6!}$$

čtveřice mezi sebou nejsou rozlišitelné
(je 6! možností, které mají stejné čtveřice)

Nebo: Všechny seřadím, pak beru po čtveřicích (zbydou 3) a vydělím 6! za záměnu čtveřic, $(4!)^6$ za ignorování pořadí v rámci každé ze 6 čtveřic a 3! za záměnu ve trojici



$$\frac{27!}{6!\cdot(4!)^6\cdot 3!}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**
Studenti jedné paralelky, ve které je 24 osob, se rozhodli připravovat na zkoušku ze ZDM tak, že každé z 6 témat připraví někteří a pak to ostatním vysvětlí. Kolik mají možností, jak se k tématům rozdělit, platí-li, že každé téma musí připravovat alespoň někdo, každý chystá právě jedno téma, kombinatoriku nechystá více než 18 studentů, protože je lehká, a relace musí chystat alespoň dva, protože je tam spousta definic?

A

B

Rozděluji do 6 neprázdných, rozlišitelných skupin
→ Stirlingova čísla 2. druhu · faktoriál

$$S(24,6)\cdot 6! - \#\text{nepřípustných } (\neg A, \neg B)$$

$\neg A$: 19 studentů kombinatoriku, zbylých 5 má každý jedno z 5 témat
⇒ více než 19 nemůže dělat kombinatoriku

$\neg B$: 1 student dělá relace, zbytek rozdělený mezi zbylá témata
⇒ $\neg A$ už je zahrnuta v $\neg B$

$$\Rightarrow S(24,6)\cdot 6! - \binom{24}{1}\cdot S(23,5)\cdot 5!$$

1 chystá relace

zbytek mezi zbylých 5 témat

tém. jsou rozlišitelná