# 2. zápočtová písemka - varianta

1. (2 body) **Relace**
   Nechť $X = \{0,1,2\}^3$, tzn. jedná se o množinu řetězců délky 3 nad abecedou $\{0,1,2\}$. Definujeme relaci $R$ na $X$ následujícím způsobem

$$a_1a_2a_3 R b_1b_2b_3 \iff (a_2+a_3<b_2+b_3) \lor (a_2+a_3=b_2+b_3 \land a_2 \ge b_2)\,.$$

Rozhodněte o vlastnostech SY, TR, AN a AS.

SY: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow bRa$

není: protipříklad $010 R 020$, ale $\neg 020 R 010$

TR: $\forall a,b,c \in \{0,1,2\}^3: aRb \land bRc \Rightarrow aRc$

Mějme $a=a_1a_2a_3$, $b=b_1b_2b_3$, $c=c_1c_2c_3$

$aRb \land bRc$ Pro jednotlivé případy:

$\iff (a_2+a_3<b_2+b_3 \land b_2+b_3<c_2+c_3) \Rightarrow a_1+a_2<c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\lor (\underline{a_2+a_3<b_2+b_3} \land \underline{b_2+b_3=c_2+c_3} \land b_2\geq c_2) \Rightarrow a_1+a_2<c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\lor (\underline{a_2+a_3=b_2+b_3} \land a_2\geq b_2 \land \underline{b_2+b_3<c_2+c_3}) \Rightarrow a_1+a_2<c_1+c_2 \Rightarrow aRc$

$\lor (a_2+a_3=b_2+b_3 \land a_2\geq b_2 \land b_2+b_3=c_2+c_3 \land b_2\geq c_2)$

$\underbrace{a_1+a_2=c_1+c_2 \qquad a_2\geq c_2}_{\Rightarrow aRc}$

$\Rightarrow$ <u>je TR</u>

AN: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \land bRa \Rightarrow a=b$

není: $001R101 \land 101R001 \land 001 \neq 002$

AS: $\forall a,b \in \{0,1,2\}^3: aRb \Rightarrow \neg bRa$

není: $001R101 \land 101R001$

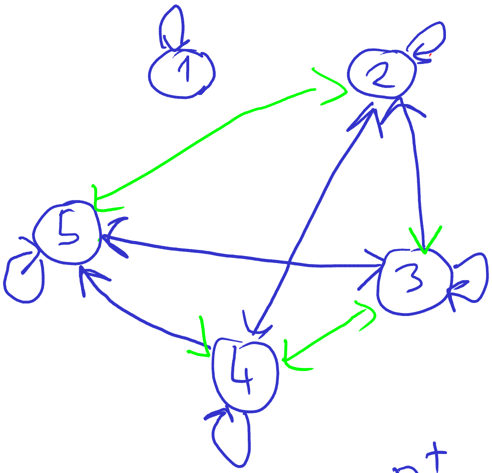
2. **Uspořádání nebo ekvivalence?**
Uvažujte na množině $\{1,2,3,4,5\}$ relaci

$$R = \{(1,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,5),(5,3),(5,5)\}\,.$$

(a) (2 body) Nalezněte tranzitivní uzávěr $R^+$ a zapište jej pomocí matice.

(b) (1 bod) Rozhodněte, jestli je $R^+$ ekvivalence nebo částečné uspořádání.

(c) (1 bod) Pokud je $R^+$ uspořádání, nakreslete jeho Hasseův diagram. Pokud je $R^+$ ekvivalence, napište její faktorovou množinu.



Zelené šipky jsou doplněné na $R^+$

$$M_{R^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R^+$
- je RE (1 na diag.)
- je SY ($M_{R^+} = M_{R^+}^T$)
- není AU ($2R^+3$, $3R^+2$)
- je TR (jedná se o tran. uzávěr)

$\Rightarrow$ $R^+$ je ekvivalence, není uspořádání

Faktorová množina

$$\{1,2,3,4,5\}/_{R^+} = \{\{1\},\{2,3,4,5\}\}$$

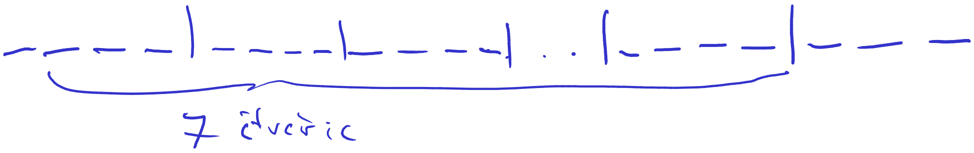
3. (2 body) **Kombinatorika I**
V ZDM je 30 studentů, kteří chtějí vypracovávat domácí úkol, na kterém můžou spolupracovat až ve čtveřicích. Všichni chtějí pracovat v co největším týmu (neboli jen jeden tým má méně členů než je dovolené maximum). Kolik způsoby se studenti můžou do týmů rozdělit?

Vybírám postupně čtveřice (a zbydou 2 ve dvojici)

$$\frac{\binom{30}{4}\cdot\binom{26}{4}\cdot\binom{22}{4}\cdot\binom{18}{4}\cdot\binom{14}{4}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}\binom{2}{2}}{7!}$$

čtveřice mezi sebou nejsou rozlišitelné
(je 7! možností, které dají stejné čtveřice)

Nebo: Všechny seřadím, pak beru po čtveřicích (zbydou 2)
a vydělím 7! za záměnu čtveřic, $(4!)^7$ za ignorování pořadí v rámci každé ze 7 čtveřic a 2 za záměnu ve dvojici




$$\frac{30!}{7!\cdot(4!)^7\cdot 2}$$

4. (2 body) **Kombinatorika II**

Studenti jedné paralelky, ve které je 24 osob, se rozhodli připravovat na zkoušku ze ZDM tak, že každé z 7 témat připraví někteří a pak to ostatním vysvětlí. Kolik mají možností, jak se k tématům rozdělit, platí-li, že každé téma musí připravovat alespoň někdo, každý chystá právě jedno téma, kombinatoriku nechystá více než 17 studentů, protože je lehká, a relace musí chystat alespoň dva, protože je tam spousta definic?

A

B

Rozdělují do 6 neprázdných, rozlišitelných skupin

→ Stirlingova čísla 2. druhu · faktoriál

$$S(24,7)\cdot 7! \; - \; \#\text{nepřípustných } (\neg A, \neg B)$$

$\neg A$: 18 studentů kombinatoriku, zbylých 6 má každý jedno z 6 témat

⇒ více než 18 nemůže dělat kombinatoriku

$\neg B$: 1 student dělá relace, zbytek rozdělený mezi zbylá témata

⇒ $\neg A$ už je zahrnuta v $\neg B$

$$\Rightarrow S(24,7)\cdot 7! - \binom{24}{1}\cdot S(23,6)\cdot 6!$$

1 chystá relace

zbytek mezi zbylých 6 témat

témata jsou rozlišitelná